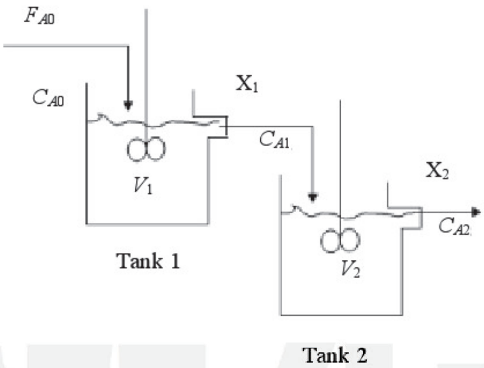
113 年高考三級單操化動
很明顯 113 年高考單操化動與 113 年地特單操化動是同一個老師命題

一、圖一描述兩個串聯等溫 CSTR 並標示入料莫爾流量(F_{A0})與莫爾濃度(C_{A0})及反應器體積 (V) 及各反應器出口濃度及轉化率符號。若各反應器內為反應速率為$-r_A = kC_A$且體積流速均為υ_0。(每小題 5 分，共 15 分)

㈠選 Damköhler number (Da) 描述此串聯等溫 CSTR 轉化率程度，定義無因次 Da。

㈡以 Damköhler number (Da) 表示 Tank 1 的出口轉化率 (X_1)。

㈢若 $V_1=V_2$，以 Da 表示 Tank 2 的出口轉化率 (X_2)。



圖一

一、可參考"Elements of Chemical Reaction Engineering" 4th by Fogler 4.3

(一) Damkohler number Da 為無因次參數(沒有單位)，可用於估計反應器的轉化程度，Da 為反應器的入口處 A 的反應速率與 A 的對流速率的比值。

$$\boxed{Da = \frac{\text{A的反應速率}}{\text{A的對流速率}} = \frac{\text{A在入口處的反應速率}}{\text{A的流入速率}} = \frac{-r_{A0}V}{F_{A0}}}$$ (本題答案)

對於 CSTR 的一級反應

$$\text{反應時間}\ \tau = \frac{\text{反應器體積}}{\text{初始的體積流率}} = \frac{V}{v_0}$$

rate = $-r_A = kC_A$

$-r_{A0} = kC_{A0}$

$$Da = \frac{-r_{A0}V}{F_{A0}} = \frac{kC_{A0}V}{F_{A0}} = \frac{kC_{A0}V}{C_{A0}v_o} = k\frac{V}{v_o} = k\tau \qquad (F_{A0} = C_{A0}\ v_0)$$

對於 CSTR 的二級反應

rate = $-r_A = kC_A^2$

$-r_{A0} = kC_{A0}^2$

$$Da = \frac{-r_{A0}V}{F_{A0}} = \frac{kC_{A0}^2V}{F_{A0}} = \frac{kC_{A0}^2V}{C_{A0}v_o} = kC_{A0}\frac{V}{v_o} = kC_{A0}\tau$$

(二）對於 CSTR 反應器

$$V_{CSTR} = F_{A0}\frac{X_{Af}}{-r_{Af}}, \quad \tau_{CSTR} = \frac{C_{A0}X_{Af}}{-r_{Af}}$$

對於一級反應 $-r_{Af} = k\,C_{Af} = k\,C_{A0}(1 - X_{Af})$

代入 τ：

$$\tau = \frac{C_{A0}X_{Af}}{-r_{Af}} = \frac{C_{A0}X_{Af}}{k\,C_{A0}(1 - X_{Af})} = \frac{X_{Af}}{k(1 - X_{Af})}$$

移項並整理：

$$X_{Af} = \frac{\tau k}{1 + \tau k}$$

又 $\tau k = Da$

所以 $X_{Af} = \dfrac{Da}{1 + Da}$

對於第一個 CSTR 反應器

$$X_{A1} = \frac{D_{a1}}{1 + D_{a1}} \quad \text{（答案）}$$

可求第一個 CSTR 反應器的出口濃度 C_{A1}

$$C_{A1} = C_{A0}(1 - X_{A1}) = C_{A0}\left(1 - \frac{D_{a1}}{1 + D_{a1}}\right) = C_{A0}\frac{1}{1 + D_{a1}}$$

(三）對於第二個 CSTR 反應器體積 V_2：

$$V_2 = \frac{F_{A1} - F_{A2}}{-r_{A2}} = \frac{v_0(C_{A1} - C_{A2})}{k_2C_{A2}}$$

$C_{A1} = C_{A0}\dfrac{1}{1 + D_{a1}}$ 代入上式：

$$V_2 = \frac{v_0(C_{A1} - C_{A2})}{k_2C_{A2}} = \frac{v_0\left(C_{A0}\frac{1}{1 + D_{a1}} - C_{A2}\right)}{k_2C_{A2}}$$

移項：

$$\frac{k_2C_{A2}V_2}{v_0} = k_2C_{A2}\tau_2 = C_{A0}\frac{1}{1 + D_{a1}} - C_{A2}$$

$$C_{A2}(1 + k_2\tau_2) = \frac{C_{A0}}{1 + D_{a1}}$$

$$C_{A2} = \frac{C_{A0}}{(1 + k_2\tau_2)(1 + D_{a1})} = \frac{C_{A0}}{(1 + k_2\tau_2)(1 + k_1\tau_1)}$$

如果兩個相同體積的反應器相連 $V_1 = V_2$，$\tau_1 = \tau_2$
且溫度相同時，反應速率常數 k 相同 $k_1 = k_2$
此時 $Da = D_{a1} = D_{a2} = k\tau$

所以 $C_{A2} = \dfrac{C_{A0}}{(1 + Da)^2} = C_{A0}(1 - X_{A2})$

$X_{A2} = 1 - \left(\dfrac{1}{1 + Da}\right)^2$ （本題答案）

補充如果有 n 個 CSTR 串聯時

$X = 1 - \left(\dfrac{1}{1 + Da}\right)^n$

$C_{An} = \dfrac{C_{A0}}{(1 + Da)^n}$

經驗法則：
$Da \leq 0.1$ 時，轉化率 $X \leq 10\%$；
$Da \geq 10$ 時，轉化率 $X \geq 90\%$

二、設計年產 100 百萬磅（lb）乙烯的工業級製程，已知反應器內反應為乙烷裂解生產乙烯，反應器操作在 1100 K 與 6 大氣壓下且乙烷轉化率為 80%。

㈠選用何種反應器較合適並說明原因？（5 分）

㈡如何決定該反應器之膨脹係數（expansion factor, ε）？（5 分）

㈢假設乙烷入料濃度為 0.00415 lb mol/ft^3 及反應速率為 $-r_A = 3.07\ C_A$，試求反應器體積為多少 ft^3？（10 分）

二、出自於"Elements of Chemical Reaction Engineering" 4th by Fogler 例題 4-3

(一) 在 1100K、6 大氣壓下，乙烷裂解生產乙烯的反應為氣相反應

因為為高壓反應，適合使用 PFR 反應器，可耐高溫高壓，且轉化率高

(二) $\varepsilon = y_{A0}\,\delta$

ε：反應器的膨脹係數

y_{A0}：反應物 A 在一開始的莫耳分率

δ：每莫耳 A 反應後增加的總莫耳數

$C_2H_{6(g)} \rightarrow C_2H_{4(g)} + H_{2(g)}$

改為 $A \rightarrow B + C$

一開始只有 A，所以 $y_{A0} = 1$

$\delta = 2 - 1 = 1$ （每莫耳 A 反應可生成 2 莫耳產物，反應式的係數變化量為 1）

$\varepsilon = y_{A0}\,\delta = 1 \times 1 = \underline{1}$

(三) 已知製程的目標是年產 100 百萬磅乙烯

乙烯 C_2H_4 的分子量 M_B = 28 g/gmole = 28 lbm/lbmole

$\dot{m}_B = 100 \times 10^6$ lbm/year

$$F_B = \frac{\dot{m}_B}{M_B} = \frac{100 \times 10^6 \text{ lbm/year}}{28 \text{ lbm/lbmole}} \times \frac{1 \text{ year}}{365 \text{ day}} \times \frac{1 \text{ day}}{86400 \text{ s}} = 0.1132 \text{ lbmole/s}$$

計算在轉化率 80%下，要年產 100 百萬磅乙烯需要的乙烷量

$F_B = F_{A0}\,X_A$

$$F_{A0} = \frac{F_B}{X_A} = \frac{0.1132 \text{ lbmole/s}}{0.8} = 0.1416 \text{ lbmole/s}$$

PFR 反應器的體積：

$$V_{PFR} = F_{A0} \int_0^{X_A} \frac{dX}{-r_A}$$

速率式：

$-r_A = k\,C_A$ （$k = 3.07\ s^{-1}$，題目沒有說明 k 的單位是什麼，假設為 s^{-1}）

對於氣相反應

$$C_A = \frac{C_{A0}(1 - X_A)}{1 + \varepsilon X_A}$$

$-r_A = k\,C_A = \dfrac{k\,C_{A0}(1 - X_A)}{1 + \varepsilon X_A}$ 代入 $V_{PFR} = F_{A0}\int_0^{X_A}\dfrac{dX_A}{-r_A}$

$$V_{PFR} = F_{A0}\int_0^{X_A}\frac{dX_A}{\frac{k\,C_{A0}(1-X_A)}{1+\varepsilon X_A}} = \frac{F_{A0}}{kC_{A0}}\int_0^{X_A}\frac{1+\varepsilon X_A}{1-X_A}dX_A$$

問題是 $\int_0^{X_A}\dfrac{1+\varepsilon X_A}{1-X_A}dX_A = ?$ （理論上題目應該要直接給積分結果，不然難度太高）

$$\int_0^{X_A}\frac{1+\varepsilon X_A}{1-X_A}dX_A = \int_0^{X_A}\frac{1}{1-X_A}dX_A + \int_0^{X_A}\frac{\varepsilon X_A}{1-X_A}dX_A = -\ln(1-X_A)\Big|_0^{X_A} + \varepsilon\int_0^{X_A}\frac{X_A}{1-X_A}dX_A$$

$$= -\ln(1-X_A) - [-\ln(1-0)] + \varepsilon\int_0^{X_A}\frac{X_A}{1-X_A}dX_A$$

$$= -\ln(1-X_A) + \varepsilon\int_0^{X_A}\frac{X_A}{1-X_A}dX_A$$

$\int_0^{X_A}\dfrac{X_A}{1-X_A}dX_A = ?$

令 $u = 1 - X_A$

$du = -dX_A$

$X_A = 1 - u$

$$\int_0^{X_A}\frac{X_A}{1-X_A}dX_A = -\int_1^{1-X_A}\frac{1-u}{u}du = -\left(\int_1^{1-X_A}\frac{1}{u}du - \int_1^{1-X_A}\frac{u}{u}du\right)$$

$$= -\left(\ln u\Big|_1^{1-X_A} - u\Big|_1^{1-X_A}\right) = -\{[\ln(1-X_A) - \ln 1] - [(1-X_A) - 1]\}$$

$$= -\ln(1-X_A) - X_A$$

$$\int_0^{X_A}\frac{1+\varepsilon X_A}{1-X_A}dX_A$$

$$= -\ln(1-X_A) + \varepsilon\int_0^{X_A}\frac{X_A}{1-X_A}dX_A$$

$$= -\ln(1-X_A) - \varepsilon[\ln(1-X_A) + X_A]$$

$$= -(1+\varepsilon)\ln(1-X_A) - \varepsilon X_A$$

$$V_{PFR} = \frac{F_{A0}}{kC_{A0}}\int_0^{X_A}\frac{1+\varepsilon X_A}{1-X_A}dX_A = \frac{F_{A0}}{kC_{A0}}[-(1+\varepsilon)\ln(1-X_A) - \varepsilon X_A]$$

已知 F_{A0} = 0.1416 lbmole/s，C_{A0} = 0.00415 lbmole/ft^3

$k = 3.07\ s^{-1}$，ε = 1，X_A = 0.8

將數據代入 V_{PFR}：

$$V_{PFR} = \frac{F_{A0}}{kC_{A0}}\left[-(1+\varepsilon)\ln(1-X_A) - \varepsilon X_A \right]$$

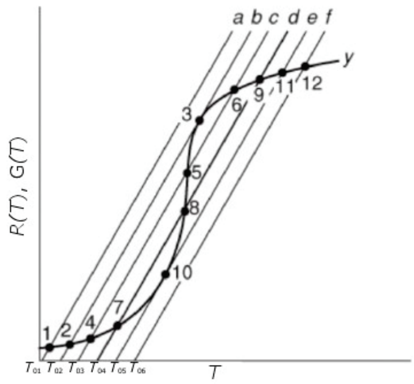
$$= \frac{0.1416\ \text{lbmole/s}}{3.07\ s^{-1} \times 0.00415\ \text{lbmole/ft}^3}\left[-(1+1)\ln(1-0.8) - 1 \times 0.8 \right] = \underline{26.88\ ft^3}$$

三、某非恆溫反應器溫度操作如圖二所示，$T_{01}, T_{02},\ldots, T_{06}$ 為反應器入口溫度。（每小題 5 分，共 15 分）

㈠寫出反應器入口溫度操作在那幾個溫度時，會有多重穩態（multiple steady states）發生。

㈡操作在那些反應器入口溫度下有存在不穩定之穩態溫度值，並說明對應圖中那些點。

㈢若在黑點 8 穩態溫度（T_{s8}）發生±5%改變，指出反應器最後穩態溫度為何？



圖二

三、類似 108 年高考化學反應工程第四題，同一個概念換個方式問

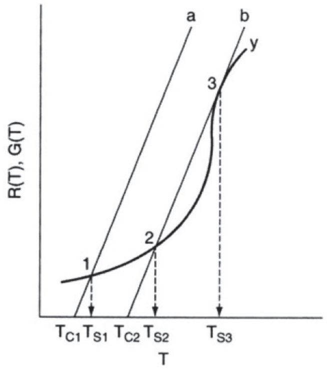
反應在特定情況下，可以會有多重恆穩狀態（multiple steady state），即不只一組條件滿足莫耳均衡與能量均衡。

如上圖所示，要探討多重恆穩狀態，可在同一座標上畫 R(T)與 G(T)，分析兩曲線相交的情況。

R(T)：熱量移除項 heat removes term（R：removed）（圖中的直線）

G(T)：熱量生成項 heat generated term（G：generated）（圖中彎曲的曲線）

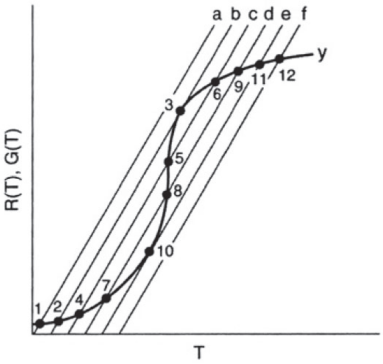
R(T)與 G(T)的交點代表在恆穩狀態下的溫度



a,b = R(T)

b 溫度 > a 溫度

y = G(T)



a,b,c,d,e,f = R(T)

f 溫度 > a 溫度

y = G(T)

假設反應器進料溫度由 T_{01} 開始，a 與 y 交會於點 1，此點的直線與 T 軸相交，其恆穩溫度為 T_{s1}，代表只有 1 個恆穩狀態。

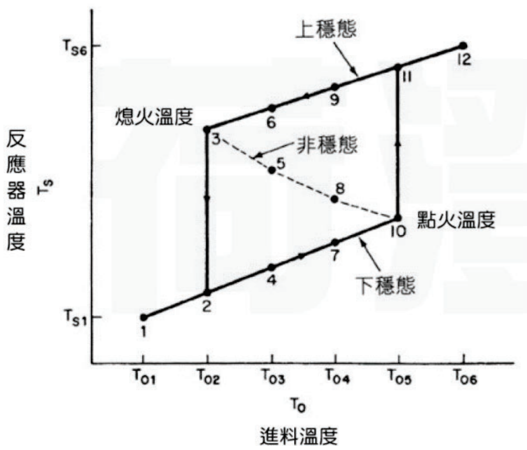
進料溫度增加到 T_{02} 時，G(T)不變，R(T)向右移（b 線），R(T)與 G(T)交會於點 2 且與點 3 相切，可知在進料溫度為 T_{02} 時，有兩個恆穩溫度 T_{s2}、T_{s3}。

持續增加進料溫度時（T_{01} → T_{06}，a → f 線），會有不同數量的恆穩溫度。

由進料溫度（T_{01} → T_{06}） VS 恆穩溫度（T_{s1} → T_{s12}）可建立下表：

進料溫度	反應器溫度
T_{01}	T_{s1}
T_{02}	T_{s2}　T_{s3}
T_{03}	T_{s4}　T_{s5}　T_{s6}
T_{04}	T_{s7}　T_{s8}　T_{s9}
T_{05}	T_{s10}　T_{s11}
T_{06}	T_{s12}

對 T_s VS T_0 作圖，可得到溫度點火－消滅曲線：



隨著進料溫度增加，恆穩操作溫度沿著底線增加直到 T_{05}，超過 T_{05} 後，恆穩溫度直接跳到 T_{s11}，發生跳點的溫度（T_{s10}）就稱為點火溫度（ignition temperature）。

當反應器在 T_{s12} 操作，將進料溫度由 T_{06} 開始冷卻，最後到 T_{02}，低於 T_{02} 的進料溫度後，恆穩溫度直接降到 T_{s2}，發生跳點的溫度（T_{s3}）就稱為熄火溫度（extinction temperature）。

點 5、點 8 代表非恆穩操作溫度，在點 5、點 8 上下微幅改變溫度時，會使反應器溫度遠離點 5、點 8 的恆穩溫度，這種特殊的恆穩狀態稱為非恆穩狀態。

(一) 在入口溫度 T_{02}、T_{03}、T_{04}、T_{05} 時，會有多重恆穩狀態發生，此時不止一組條件滿足莫耳均衡與能量均衡。

(二) 操作在入口溫度 T_{03}、T_{04} 時，會有不穩定的穩態溫度值，分別對應到圖中的點 5 與點 8。

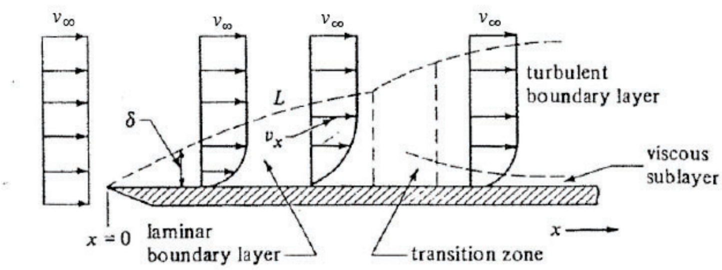
（三）在點 8 的穩態溫度 T_{s8} 發生±5%改變時，
如果溫度發生+5%改變，反應器的溫度將增加到上方的恆穩狀態點 9，溫度為 T_{s9}；
如果溫度發生-5%改變，反應器的溫度將減少到下方的恆穩狀態點 7，溫度為 T_{s7}。

補充：
相較之下，如果是恆穩狀態的穩態溫度 T_{s8} 發生±5%改變時，會回到原本的溫度
如果 T_{s7} 發生+5%改變，反應器的溫度增加後，會再減少到 T_{s7}；
如果 T_{s7} 發生-5%改變，反應器的溫度減少後，會再增加到 T_{s7}。

四、如圖三所示流體在平板上流動形成邊界層厚度（boundary layer）分析。選用 von Karman 積分式，$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x(v_\infty - v_x)dy$，描述邊界層厚度($\delta$)，$\tau_0$為平板表面的剪應力，$\rho$為流體密度。

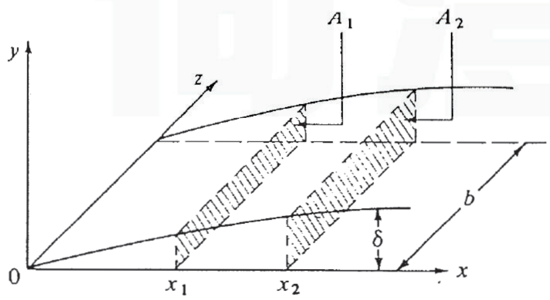
㈠假設層流（laminar）邊界層區內速度分布為，$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$，試推導出在 $x = L$ 位置的邊界層厚度（δ）關係式。(10 分)

㈡若紊流（turbulent）邊界層區拖曳係數（drag coefficient, C_D）表示成，$C_D = 0.072(N_{Re,L})^{-1/5}$，$N_{Re,L}$為在 $x = L$ 位置的 Reynolds number，試寫出紊流邊界層區內可能速度分布。(5 分)



圖三

四、圖片出自於"Transport Processes and Separation Process Principles" 4th by Geankoplis 圖 3.10-5，章節為 3.10 H 邊界層分析



平板的邊界層的解最早是由 Blasius 解得，在 $v_x \approx 0.99\ v_\infty$處的邊界層厚度δ近似為：

$$\delta = \frac{5.0\ x}{\sqrt{N_{Re}}} = 5.0\sqrt{\frac{\mu x}{\rho v_\infty}}$$

$$N_{Re} = \frac{\rho v_\infty x}{\mu}$$

δ 與 $\sqrt{x}$ 成正比

但 Blasius 的解法只能解層流的問題，無法解紊流問題。
von Karman 提出近似的解法，可適用層流與紊流。

von Karman 積分式：

$$\boxed{\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x\,(v_\infty - v_x)\,dy} \quad —①$$

τ_0：平板表面的剪應力（在 $y = 0$ 位置）

要解 von Karman 積分式，要先假設 v_x 在 y 方向的速度分佈，假設的越正確，最後的結果越接近。

（一）邊界層的速度分佈須符合下列邊界條件：

$y = 0$ 時，$v_x = 0$

$y = \delta$ 時，$v_x \fallingdotseq v_\infty$

$y = \delta$ 時，$\dfrac{dv_x}{dy} \fallingdotseq 0$

要同時符合以上假設，可假設層流的速度分佈：

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$v_x = v_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] \quad —②$$

② 代入 ①：

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x\,(v_\infty - v_x)\,dy$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^{\delta}\left\{v_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\right\}\left\{v_\infty - v_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\right\}dy$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = v_\infty^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\delta\right) \qquad \text{（經由很複雜的積分計算）}$$

所以 $\dfrac{d\delta}{dx} = \dfrac{280}{39}\dfrac{\tau_0}{\rho v_\infty^2} \quad —③$

要求 τ_0 之值

流體流經平板的拖曳力只有表面摩擦（$y = 0$ 處），
可以用平板上任意處 x 的剪應力 τ_0 表示：

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0} \quad —④$$

① 代入 ④：

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0} = \mu\frac{d}{dx}\left\{v_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\right\}_{y=0}$$

$$= \mu v_\infty\left[\frac{3}{2}\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{3y^2}{\delta^3}\right)\right]_{y=0} = \mu v_\infty\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\delta}\right) = \frac{3\mu v_\infty}{2\delta} \quad —⑤$$

⑤ 代入 ③：

$$\frac{d\delta}{dx}=\frac{280}{39}\frac{\tau_0}{\rho v_\infty^2}=\frac{280}{39}\frac{1}{\rho v_\infty^2}\frac{3\mu v_\infty}{2\delta}$$

移項：（變數分離）

$$\delta\ d\delta=\frac{280}{39}\frac{1}{\rho v_\infty^2}\frac{3\mu v_\infty}{2}dx$$

分別對 δ 與 x 作定積分，δ 由 δ=0 積到 δ=δ，x 由 x=0 積到 x=L：

$$\int_0^\delta \delta\ d\delta=\frac{280}{39}\frac{1}{\rho v_\infty^2}\frac{3\mu v_\infty}{2}\int_0^L dx$$

$$\frac{1}{2}\delta^2=\frac{280}{39}\frac{1}{\rho v_\infty^2}\frac{3\mu v_\infty}{2}L$$

解 $\boxed{\delta=4.64\sqrt{\frac{\mu L}{\rho v_\infty}}}$ —⑥ （本題答案）

平板長度 L、寬度 b 的總拖曳力為：

$$F_D=b\int_0^L \tau_0\,dx \quad —⑦$$

⑤ 代入 ⑦：

$$F_D=b\int_0^L \tau_0\,dx=b\int_0^L \frac{3\mu v_\infty}{2\delta}dx=\frac{3b\mu v_\infty}{2\delta}L$$

平板端的面積為 $A=bL$

平板的拖曳力 F_D 與拖曳係數的關係為：

$$F_D=\frac{1}{2}C_D\rho V_\infty^2 A$$

所以 $\frac{3b\mu v_\infty}{2\delta}L=\frac{1}{2}C_D\rho V_\infty^2(bL)$ —⑧

⑥ 代入 ⑧：

$$\frac{3b\mu v_\infty}{2\times4.64\sqrt{\frac{\mu L}{\rho v_\infty}}}L=\frac{1}{2}C_D\rho V_\infty^2(bL)$$

解 $C_D=1.292\sqrt{\frac{\mu}{Lv_\infty\rho}}=\frac{1.292}{\sqrt{N_{Re}}}$

這就是 C_D 的推導方法，預估的 v_s 會影響 C_D 的數值

（二）原文書的解法是先假設平板邊界層的速度分佈 v_x，
代入 von Karman 積分式後，再求 C_D 之值。
這題的考法顛倒，先給 C_D 值，再反推平板邊界層的速度分佈 v_x，題目問的是寫出速度分佈，而不是要你導出，所以只要寫出結果即可，不用推導出

$C_D = 0.072\ (\ N_{Re,L}\ )^{-1/5}$
是由平板的紊流邊界層流速經驗式所導出

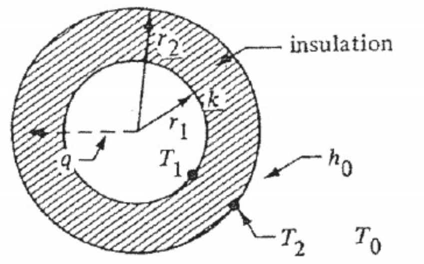
$$\boxed{\frac{v_x}{v_\infty} = (\frac{y}{\delta})^{1/7}}$$

這個就是答案
本題太冷門，不用花時間念，看過就好。

五、圖四描述半徑 r_1 金屬電纜線其金屬面溫度為 T_1，外層包覆絕緣體，其熱傳導係數為 k。已知絕緣塑膠材質外緣表面溫度為 T_2，暴露環境溫度為 T_0 與熱對流係數為 h_0。

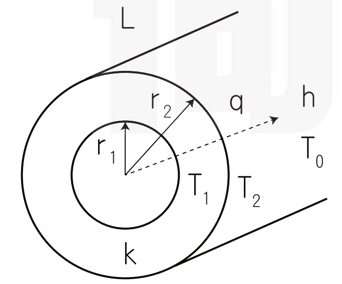
㈠定義絕緣體臨界半徑，並試推導出。（5 分）

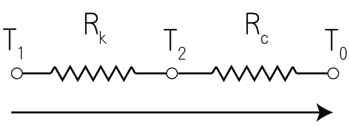
㈡假設電纜線長 1 m，半徑 1 mm，其金屬面溫度為 $T_1 = 400$ K 且 $k = 385$ W/m·K，絕緣體 $k = 0.02$ W/m·K。若外界氣溫 $T_0 = 300$ K 且 $h_0 = 20$ W/m²·K，增加絕緣體達多少厚度時會低於電纜線未覆蓋絕緣體的熱損失量？（10 分）



圖四

五、(一) 臨界半徑 r_c 是指物體表面熱傳導最大時的絕熱層厚度。
當半徑低於臨界半徑 r_c 時，隔熱層越厚熱傳量越大（越不隔熱）；
當半徑超過臨界半徑 r_c 時，隔熱層越厚熱傳量越小（越隔熱）。





$$\Sigma R = R_k + R_c = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \frac{1}{2\pi h\, r_2\, L}$$

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = \frac{T_1 - T_0}{R_k + R_c} = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \dfrac{1}{2\pi h\, r_2\, L}}$$

由熱阻抗 ΣR 來看，並無法得知包覆絕熱材料時，熱阻 抗 ΣR 是否會增加（是否能達到絕熱效果）

為了探討 q 與 r_2 的關係，假設 q 具有最大值

$$\frac{dq}{dr_2} = 0$$

$$\frac{d}{dr_2}\left(\frac{T_1 - T_0}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \dfrac{1}{2\pi h r_2 L}}\right) = 0$$

$$(T_1 - T_0)\,2\pi L \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{k} + \dfrac{1}{hr_2}}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{k} + \dfrac{1}{hr_2}}\right) = 0$$

$$-\frac{\dfrac{d}{dr_2}\left[\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{k} + \dfrac{1}{hr_2}\right]}{\left[\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{k} + \dfrac{1}{hr_2}\right]^2} = 0$$

（使用的數學技巧 請參考後面補充）

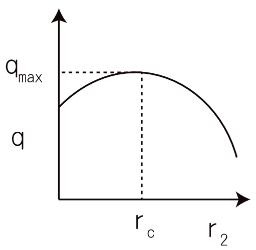
$$\frac{d}{dr_2}\left[\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{k} + \frac{1}{hr_2}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dr_2}\left[\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{k} + \frac{1}{hr_2}\right] = \frac{d}{dr_2}\left[\frac{\ln r_2}{k} - \frac{\ln r_1}{k} + \frac{1}{hr_2}\right] = \frac{1}{r_2 k} - 0 - \frac{1}{hr_2^2} = 0$$

所以 $\dfrac{1}{r_2 k} = \dfrac{1}{hr_2^2}$

解 $r_2 = \dfrac{k}{h}$

當 $r = r_c$ 時，$k = k_i$，$h = h_0$，$\boxed{r_c = \dfrac{k_i}{h_0}}$



當半徑低於臨界半徑 r_c 時，隔熱層越厚熱傳量越大（越不隔熱）；
當半徑超過臨界半徑 r_c 時，隔熱層越厚熱傳量越小（越隔熱）。

補充：分數的微分技巧

① $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = -\dfrac{\dfrac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$

② $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) - f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$

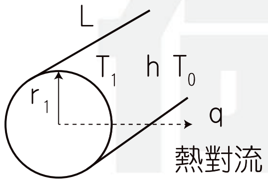
證明：　　　　前微　後不微　　前不微　　後微

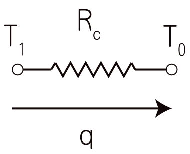
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{df(x)}{dx}\ \frac{1}{g(x)} + f(x)\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= \frac{df(x)}{dx}\frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{-\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}\right\}$$

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

（二）未包覆絕熱材料時



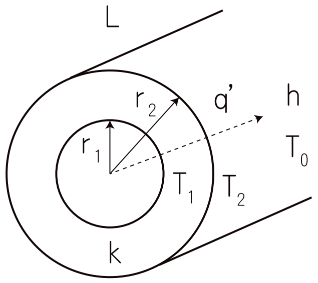


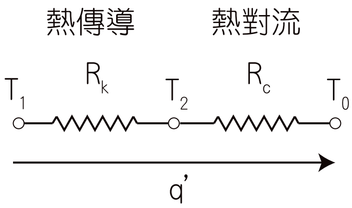
$$R_c = \frac{1}{2\pi h\, r_1\, L}$$

（因為不知道中心點的溫度，所以不考慮金屬內部的熱傳導）

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = \frac{T_1 - T_0}{R_c} = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{h2\pi r_1 L}}$$

包覆絕熱材料時





$$\Sigma R = R_k + R_c = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \frac{1}{2\pi h\, r_2\, L}$$

$$q' = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = \frac{T_1 - T_0}{R_k + R_c} = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \dfrac{1}{2\pi h\, r_2\, L}}$$

已知 $L = 1\ m$，$r_1 = 1\ mm = 0.001\ m$

$T_1 = 400\ K$，$k = 0.02\ W/mK$，$T_0 = 300\ K$，$h_0 = 20\ W/m^2K$

$$q = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{1}{h2\pi r_1 L}} = \frac{400\ K - 300\ K}{\dfrac{1}{20\ W/m^2K \times 2\pi \times 0.001\ m \times 1\ m}} = 12.566\ W$$

$$q' = \frac{T_1 - T_0}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} + \dfrac{1}{2\pi h\, r_2\, L}} = \frac{400\ K - 300\ K}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{0.001\ m}}{2\pi \times 0.02\ W/mK \times 1\ m} + \dfrac{1}{20\ W/m^2K \times 2\pi \times r_2 \times 1\ m}}$$

當 $q' < q$ 時，

$$\frac{400\ K - 300\ K}{\dfrac{\ln\frac{r_2}{0.001\ m}}{2\pi \times 0.02\ W/mK \times 1\ m} + \dfrac{1}{20\ W/m^2K \times 2\pi \times r_2 \times 1\ m}} < 12.566\ W$$

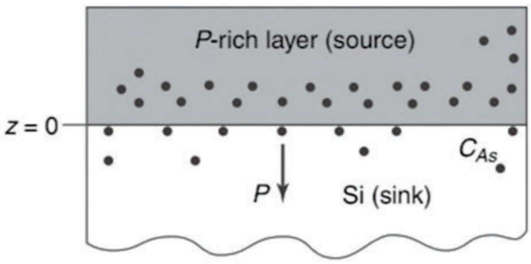
利用試 誤法，不斷代入不同的 r_2，可得 $r_2 = 0.001\ m$

這代表只要有絕熱層（r_2只要大於 r_1），不管厚度多少都有絕熱效果

$$r_c = \frac{k_i}{h_0} = \frac{0.02\ W/mK}{20\ W/m^2K} = 0.001\ m = 1\ mm$$ 即為 r_1，代表 r_1 的厚度已達臨界半徑

<u>任何厚度的絕熱層都有絕熱效果</u>

六、圖五描述磷摻雜矽晶圓穩態擴散過程。已知磷初始濃度為零，表層濃度為 2.5×10^{20} atoms/cm^3 (C_{As})，及磷在矽晶圓內擴散係數 6.5×10^{-13} cm^2/s，估算需多久時間後在離表面位置 1.76 微米的磷濃度為表層濃度 1%。提示誤差函數 erf(1.8) = 0.989 及 erf(1.9) = 0.992。(10 分)



圖五

六、出自於"Fundamentals of Momentum , Heat , and Mass Trasnfer" 7th by 3W 27.3 example 1，這是 Unsteady-state 的質傳問題（與時間有關），國考比較少考

由 general equation of continuity 知：

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \cancelto{0}{\vec{v}} \circ \nabla C_A = D_{AB}\nabla^2 C_A + \cancelto{0}{R_A}$$

濃度累積量　因分子移動的分子擴散　因濃度差的分子擴散　因反應的分子擴散

A 擴散進入固體中，擴散速度很慢，$\vec{v} \doteqdot 0$

在 Si 固體中沒有發生反應，$R_A = 0$

所以

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\nabla^2 C_A$$

可得控制方程式 governing equation：

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$$

初始條件：$t = 0$，$C_A = C_{A0}$

邊界條件：$t = t$，$z = 0$，$C_A = C_{As}$

$t = t$，$z = \infty$，$C_A = C_{A0}$

解這個要用公式解（有背過才會）

令 $\eta = \dfrac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}$，$\theta = \dfrac{C_A - C_{A0}}{C_{As} - C_{A0}}$ —①

邊界條件改為：$t = t$，$\eta = 0$，$\theta = 1$
$t = t$，$\eta = \infty$，$\theta = 0$

① 代入控制方程式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \theta'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right) = \theta'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}}}t^{-0.5}\right) = -0.5\theta'\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}}}t^{-1.5} = -$$

$$0.5\theta'\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)t^{-1} = -\frac{\eta}{2t}\theta'$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\theta'\frac{1}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{D_{AB}t}}\frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{D_{AB}t}}\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right) = \frac{1}{2\sqrt{D_{AB}t}}\theta''\frac{1}{2\sqrt{D_{AB}t}} = \frac{1}{4D_{AB}t}\theta''$$

將上式代入 $\dfrac{\partial \theta}{\partial t} = D_{AB}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$：

$$-\frac{\eta}{2t}\theta' = D_{AB}\left(\frac{1}{4D_{AB}t}\theta''\right)$$

整理得：

$$\theta'' + 2\eta\theta' = 0$$

令 $\theta' = u$，$\theta'' = \dfrac{du}{d\eta}$

$$\frac{du}{d\eta} + 2\eta u = 0$$

變數分離：

$$\frac{du}{u} + 2\eta d\eta = 0$$

不定積分：

$\ln u + \eta^2 = \ln C_1$ （$\ln C_1$ = 常數，不定積分會產生常數項）

$\ln u = \ln C_1 - \eta^2 = \ln(C_1 e^{-\eta^2})$

$u = C_1 e^{-\eta^2}$

$u = \dfrac{d\theta}{d\eta}$ 代入上式：

$\dfrac{d\theta}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2}$

積分：

$\theta = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + C_2$

代入邊界條件：$t = t$，$\eta = 0$，$\theta = 1$

$t = t$，$\eta = \infty$，$\theta = 0$

解 $C_1 = -\dfrac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}$，$C_2 = 1$

$$\theta = 1 - \frac{\int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = 1 - \mathrm{erg}(\eta)$$

$\mathrm{erg}(\eta) = \dfrac{\int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}$ 稱為誤差函數 error function

$$\theta = \frac{C_A - C_{A0}}{C_{As} - C_{A0}} = 1 - \mathrm{erg}(\eta)$$

$C_A - C_{A0} = (C_{As} - C_{A0})(1 - \mathrm{erg}(\eta)) = C_{As} - C_{A0} - C_{As}\,\mathrm{erg}(\eta) + C_{A0}\,\mathrm{erg}(\eta)$

$C_A - C_{As} = (C_{A0} - C_{As})\,\mathrm{erg}(\eta)$

$$\frac{C_A - C_{As}}{C_{A0} - C_{As}} = \mathrm{erg}(\eta) = \mathrm{erg}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)$$

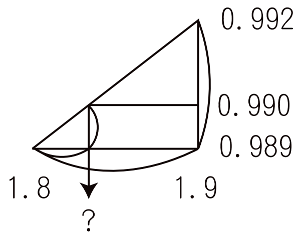
已知 $C_{As} = 2.5 \times 10^{20}$ atm s/cm^3，$C_A = C_{As} \times 1\% = 2.5 \times 10^{18}$ atm s/cm^3，$C_{A0} = 0$

$D_{AB} = 6.5 \times 10^{-13}$ cm^2/s，$z = 1.76$ μm

$$\frac{C_A - C_{As}}{C_{A0} - C_{As}} = \frac{2.5 \times 10^{18} - 2.5 \times 10^{20}}{0 - 2.5 \times 10^{20}} = 0.990 = \mathrm{erf}(\eta)$$

題目告知 $\mathrm{erf}(1.8) = 0.989$，$\mathrm{erf}(1.9) = 0.992$

要用相似三角形反推 $\mathrm{erf}(\eta) = 0.990$ 的η數值



$$\frac{0.990 - 0.989}{? - 1.8} = \frac{0.992 - 0.989}{1.9 - 1.8}$$ 解 ? = 1.833

可知 $\eta = \dfrac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}} = 1.833$

$$\frac{1.76\ \mu m \times 10^{-6}\ m/\mu m}{2\sqrt{6.5 \times 10^{-13}\ cm^2/s \times t \times 10^{-4}\ m^2/cm^2}} = 1.833$$

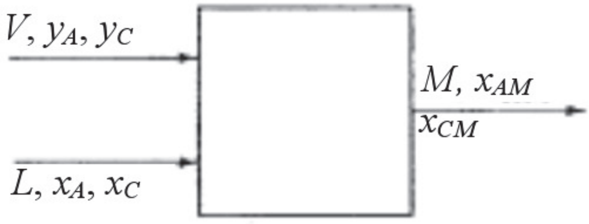
解 $\underline{t = 3545.9\ s}$

我建議這題直接跳過，不要浪費時間

七、圖六描述兩液相流體 V(kg)與 L(kg) 含有成分 A, B, C 混合後進入萃取單元達平衡後離開此單元流體 M(kg)。圖中 y_A, y_C, x_A, x_C 分別表示入口端兩相流體中 A 與 C 成分質量分率，x_{AM} 與 x_{CM} 分別表示出口端 A 與 C 成分質量分率。

㈠依圖所示寫出對應質量守恆式。(5 分)

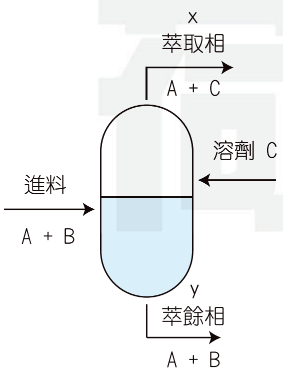
㈡已知萃取層 $y_A = 0.04, y_C = 0.94$，萃餘層 $x_A = 0.12, x_C = 0.02$，若出口端量為 100 kg 且 $x_{AM} = 0.1$，求 V(kg)與 L(kg)值？(5 分)



圖六

七、這是單級平衡萃取

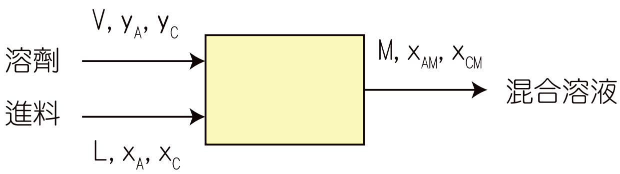
V 為溶劑或流體，L 為進料，M 為平衡後的混合流體



A：溶質

B：不溶的液體

C：溶劑



x_A、x_C：進料中 A 與 C 成分的質量分率

y_A、y_C：溶劑中 A 與 C 成分的質量分率

x_{AM}、x_{CM}：混合流體中 A 與 C 成分的質量分率

由總質量守衡知：

$V + L = M$ —①

由 A 的質量守衡知：

$V\,y_A + L\,x_A = M\,x_{AM}$ —②

由 C 的質量守衡知：

$V\,y_C + L\,x_C = M\,x_{CM}$ —③

① 代入 ②：

$V\,y_A + L\,x_A = (V + L)\,x_{AM}$

移項：

$V(y_A - x_{AM}) = L(x_{AM} - x_A)$

$$\frac{L}{V} = \frac{y_A - x_{AM}}{x_{AM} - x_A} \quad —④$$

① 代入 ③：

$V\,y_C + L\,x_C = (V + L)\,x_{CM}$

移項：

$V(y_C - x_{CM}) = L(x_{CM} - x_C)$

$$\frac{L}{V} = \frac{y_C - x_{CM}}{x_{CM} - x_C} \quad —⑤$$

由 ④、⑤ 知：

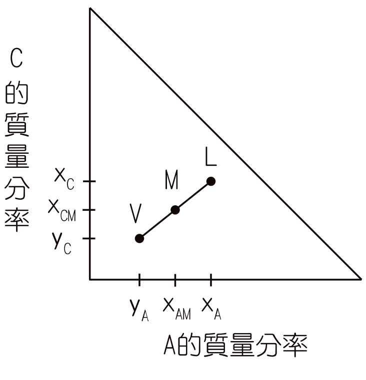
$$\frac{L}{V} = \frac{y_A - x_{AM}}{x_{AM} - x_A} = \frac{y_C - x_{CM}}{x_{CM} - x_C}$$

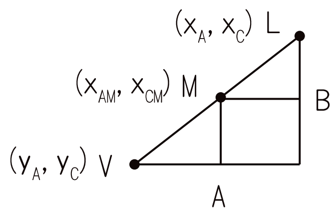
所以

$$\frac{\boxed{y_A} - \boxed{x_{AM}}}{\boxed{y_C} - \boxed{x_{CM}}} = \frac{\boxed{x_{AM}} - \boxed{x_A}}{\boxed{x_{CM}} - \boxed{x_C}}$$

點 V 點 M 點 M 點 L

可知 V、L、M 三點共線





由相似三角形知：

$\overline{VA} : \overline{MB} = \overline{VM} : \overline{LM}$

$$\frac{L}{V} = \frac{y_A - x_{AM}}{x_{AM} - x_A} = \frac{\overline{VA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{VM}}{\overline{LM}}$$

這個稱為槓桿原理，如果題目有給圖時，可以用槓桿原理解

(一)

由總質量守衡知：

$V + L = M$

由 A 的質量守衡知：

$V\, y_A + L\, x_A = M\, x_{AM}$

由 C 的質量守衡知：

$V\, y_C + L\, x_C = M\, x_{CM}$

(二) 題目設計太簡單，不用代公式，靠質量守衡就能解

由總質量守衡知：

$V + L = 100\ \text{kg}$

由 A 的質量守衡知：

$V \times 0.04 + L \times 0.12 = 100\ \text{kg} \times 0.1$

由 C 的質量守衡知：

$V \times 0.94 + L \times 0.02 = 100\ \text{kg}\ x_{CM}$

解以上聯立方程式：

$\underline{V = 25\ \text{kg}}$

$\underline{L = 75\ \text{kg}}$

$x_{CM} = 0.25$

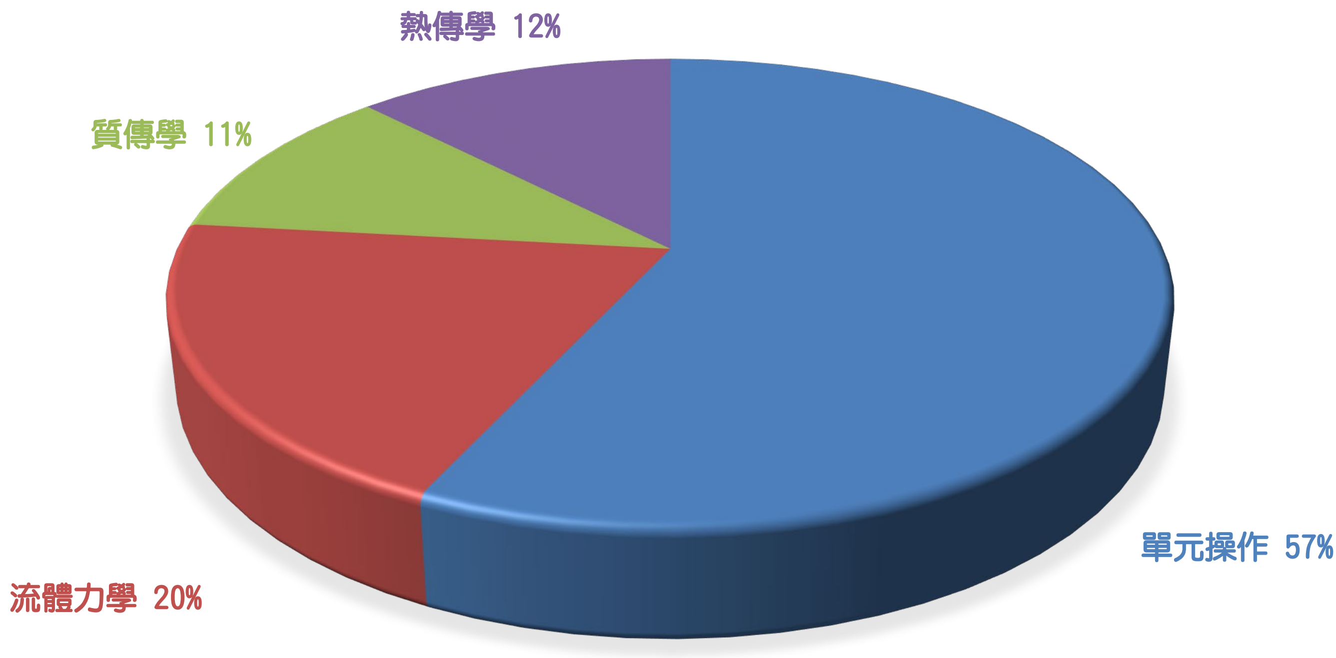
如果要代公式

$$\frac{L}{V} = \frac{y_A - x_{AM}}{x_{AM} - x_A} = \frac{0.04 - 0.1}{0.1 - 0.12} = 3$$

又 $V + L = 100\ \text{kg}$

解 $\underline{V = 25\ \text{kg}}$，$\underline{L = 75\ \text{kg}}$

高考單操輸送歷年考型分析(101-113年)



113 年高考單操輸送配分比重：(單操佔 50 分)

流體力學　15 分　　熱傳學 15 分

質傳學 10 分　　單元操作 10 分

113 年高考單操輸送預計配分：(單操預計佔 55 分)

★單元操作 30 分★　　流體力學 15 分

熱傳學 10 分

113 年高考改制，單操與化動合併為一科，官方規定單操輸送 55 分+化動 45 分，單就單操來說，考法跟以往相同，歷年單操考最多，其次為流力，接著為質傳、熱傳（熱交換器、蒸發器歸在單操），各章節建議投入時間參考上述百分比，常考的念熟，不常考的會基本即可。建議高考單操、地特單操、國營單操的題目都要練習過，有些老師會在這幾個考試重複命題，中文的題目參考價值很高，有空可以念 McCabe 中譯本。

高考單操歷年統計

年份	流力	熱傳	質傳	單操	總計
95	40	16	24	20	100
96	40	30	30		100
97				100	100
98	25	25	25	25	100
99	20		20	60	100
100		20		80	100
101	50	25		25	100
102			20	80	100
103	20		10	70	100
104	40	20		40	100
105	25			75	100
106			30	70	100
107	38			62	100
108			32	68	100
109	55			45	100
110		40	5	55	100
111		20		80	100
112		25	25	50	100
113	15	15	10	10	50
13 年比重	20%	12%	11%	57%	100%

★單元操作：57%

95 年　化工機械簡圖　20 分
97 年　浮子流量計、熱交換器　50 分
蒸餾塔求塔底組成　25 分
蒸餾塔求平衡線、證明　25 分
98 年　解釋名詞　25 分
99 年　填充床壓力降、負載、氾溢、
檔板、過濾、離心泵　30 分
皮托管、攪拌槽　30 分
100 年　蒸發器、幫浦求功率、
蒸餾塔、吸收塔　80 分
101 年　蒸餾塔解釋名詞、證明　25 分
102 年　填充床溝流、最小流體化現象、
重力沉降的運用、再壓縮蒸發、
倒瀉、氾溢、濕球溫度　30 分
浮子流量計量測範圍　10 分
求泵馬力、NPSH、攪拌槽　40 分
103 年　風扇求理論功率　20 分
熱交換器、吸收塔　50 分
104 年　填充床求參數、白金漢 Law　40 分
105 年　流量計原理、優缺點　25 分
蒸餾塔公式、板數　25 分
106 年　離心泵的氣結、孔蝕現象　10 分
離心泵轉速與直徑關係　20 分
填充塔的回收率計算　20 分
107 年　泵的計算問題　42 分
熱交換器計算　20 分
108 年　蒸發器容量、經濟效益　8 分
泵的計算問題、熱交換器　40 分
蒸餾塔計算問題　20 分
109 年　吸收塔塔高、熱交換器　45 分
110 年　濾媒、皮托管、流量計、
泵效率、NPSH　55 分
111 年　白努力定律、熱交換器計算、
攪拌槽轉速關係、批次蒸餾　80 分
112 年　白努力定律、沉降　50 分
113 年　單級平衡萃取　10 分

高考單操歷年統計

★流體力學：20%

95 年　U 形管求壓力　16 分
　　　垂直圓管的流力問題　24 分
96 年　流體沿平面流下問題　40 分
98 年　連續方程式導證　25 分
99 年　毛細管流力問題　20 分
101 年　浮球的液位高度問題　25 分
　　　噴嘴求合力　25 分
103 年　流體沿圓管外壁流下　20 分
104 年　流體沿垂直平板流下　20 分
　　　白金漢定律　20 分
105 年　平板的流力問題　25 分
107 年　圓管的流力問題　38 分
109 年　摩擦係數計算、
　　　非牛頓流體計算　55 分
113 年　邊界層分析　15 分

●質傳學：11%

95 年　氣體的擴散係數　24 分
96 年　Fick 第一擴散定律與證明　30 分
98 年　雙膜理論　25 分
99 年　球型觸媒的擴散問題　20 分
102 年　平板的氣體莫耳通量　20 分
103 年　質傳係數類比、雙膜理論　10 分
106 年　氣體的蒸發問題　20 分
　　　雷諾類比　10 分
108 年　薄膜理論、滲透理論　8 分
　　　同相反應一微分子擴散　24 分
110 年　擴散係數　5 分
112 年　異相反應一維分子擴散　25 分
113 年　Unsteady-state 質傳問題　10 分

★熱傳學：12%

95 年　求輻射能通量　16 分
96 年　球體熱傳阻力、時間　30 分
98 年　平板的熱傳導　25 分
100 年　金屬絕緣層的熱傳問題　20 分
101 年　流體的熱傳問題　25 分
104 年　平板的熱傳導　20 分
110 年　圓管熱傳導、烤雞問題　40 分
111 年　求套管的熱流量　20 分
112 年　烤雞問題　25 分
113 年　臨界半徑　15 分

命題重點：

以下內容請務必念熟！
流力：★流體沿著平板／圓管外壁流下問題★、流力的計算問題、Hagen-Poiseuille 應用
熱傳：平板／圓管／球體的熱傳導
質傳：雙膜理論、氣體擴散的質傳問題、相關參數類比
單操：★泵的計算與揚程問題★、★流量計★、★蒸餾塔★、填充床壓力降、相關解釋名詞
　　　★熱交換器★、蒸發罐的相關計算